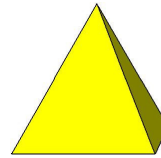
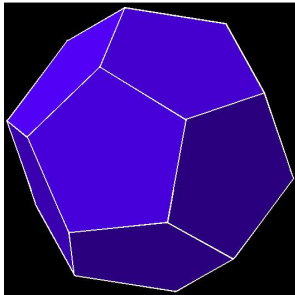
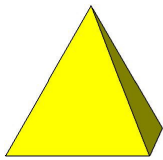




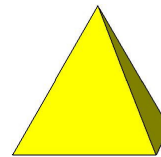
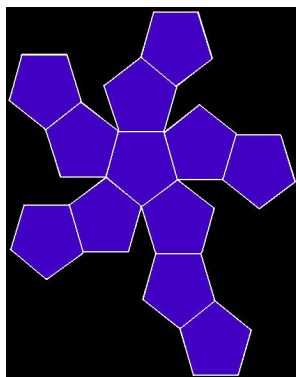
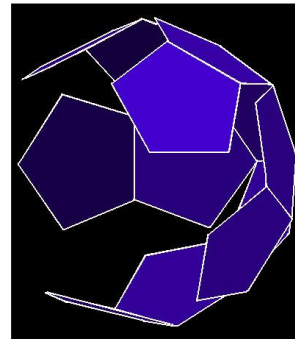
Estudando Poliedros com Auxílio do *Software Poly*



Poly



Poly



Poly

Silvia Cristina Freitas Batista
Gilmar Teixeira Barcelos
Flávio de Freitas Afonso

Campos dos Goytacazes
2006



Estudando Poliedros com Auxílio do *Software Poly*¹

Poliedros

1- Definições

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos² planos, de tal forma que a interseção de dois polígonos distintos seja uma aresta comum, um vértice comum, ou vazia (LIMA, 1991). Os polígonos são denominados faces do poliedro. Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, arestas e vértices do poliedro.

As Figuras 1a e 1b exemplificam poliedros. A Figura 1c não representa um poliedro, pois a interseção das faces F e G não é vazia, não é uma aresta, nem um vértice comum. A Figura 1d não representa um poliedro, pois a face superior e a inferior não são polígonos.

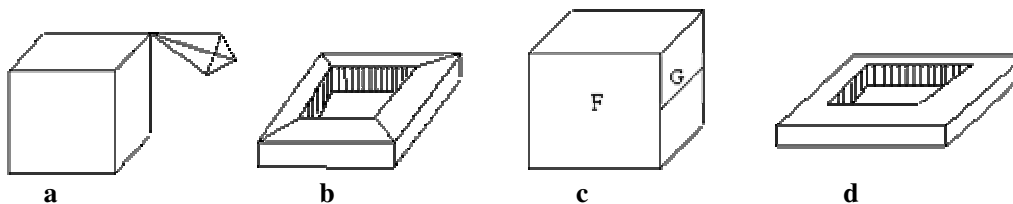


Figura 1: Sólidos geométricos

Fonte: Figura 1a - LIMA, *et. al.*, 2002; Figuras 1b, 1c e 1d – LIMA, 1991

Um **poliedro** é **convexo** se qualquer reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em no máximo, dois pontos (LIMA, *et. al.*, 2002). Ou, equivalentemente, um poliedro é convexo quando cada lado de um polígono é também lado de um, e apenas um, outro polígono e, além disso, o plano que contém um desses polígonos deixa todos os outros em um mesmo semi-espaço. Existem poliedros não-convexos, como por exemplo, o da Figura 2. Podemos observar que a reta representada corta o poliedro em mais de dois pontos, ou, de modo equivalente, podemos perceber que o plano que contém a face ABCD não deixa as demais faces num mesmo semi-espaço.

¹ Este material foi elaborado pelas professoras Sílvia Cristina Freitas Batista e Gilmara Teixeira Barcelos e pelo bolsista CNPq - Flávio de Freitas Afonso.

² Seja uma seqüência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, na qual três pontos consecutivos não são colineares. A reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ com os pontos internos da região limitada por estes segmentos, chama-se polígono.

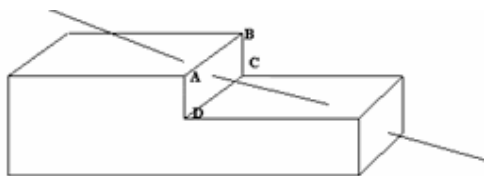


Figura 2: Poliedro não convexo

2- Classificação de Poliedros

O *software* Poly³ permite visualizar poliedros convexos, além de planificá-los e rotacioná-los. Os poliedros são apresentados nas seguintes categorias: platônicos, sólidos de Arquimedes, prismas e anti-prismas, sólidos de Johnson, deltaedros, sólidos de Catalan, dipirâmides e deltoedros, esferas e domos geodésicos. A facilidade oferecida pelo *software* em copiar e colar figuras em um editor de texto é outro fator positivo do mesmo.

2.1 Poliedros Regulares

Um poliedro é **regular** quando todas as faces são polígonos regulares congruentes e todos os vértices são congruentes. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice. É possível provar que existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

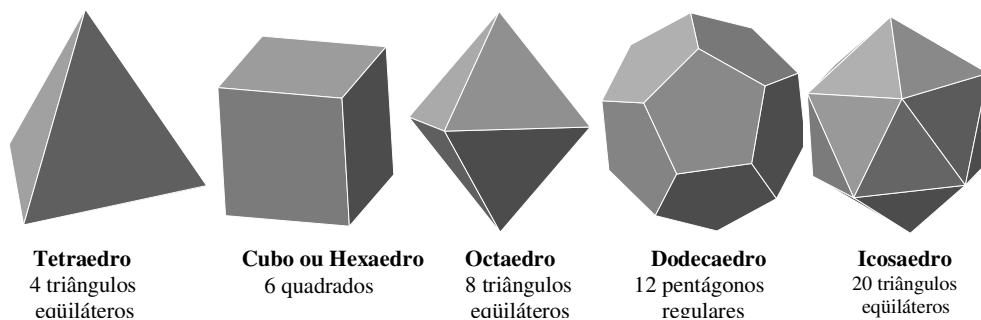


Figura 3: Poliedros Regulares Convexos

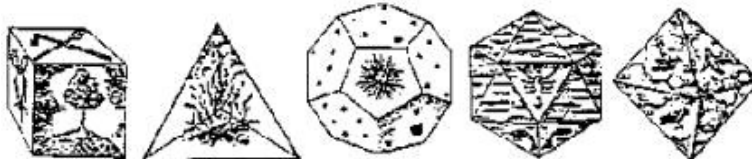
Os cinco poliedros regulares convexos — tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro — ficaram conhecidos na história como sólidos platônicos, pelo fato de Platão ter construído suas teorias a respeito da origem do universo, associando a estes os constituintes fundamentais da natureza. Platão professava que Deus criou o mundo a partir de quatro elementos básicos: a terra, o fogo, o ar e a água. Ele procurou, então, definir as essências específicas desses elementos através de quatro objetos geométricos, os poliedros convexos regulares, que representavam, aos olhos dos gregos, harmonia e uma certa perfeição.

- a terra, o elemento mais imóvel, Platão associou ao cubo, o único poliedro com faces quadradas e, dessa forma, o mais apto a garantir estabilidade;

³ Poly é um programa shareware, para explorar e construir poliedros. A empresa Pedagoguery *Software*, disponibiliza em <http://www.peda.com/poly/> uma versão avaliativa completa do *software*.

- o fogo ele atribuiu ao tetraedro, que é o poliedro mais "pontudo", com arestas mais cortantes, com menor número de faces e de maior mobilidade;
- a água e o ar, que são de mobilidade crescente e intermediária entre a terra e o fogo, ele atribuiu, respectivamente, ao icosaedro e ao octaedro.

Com o tempo, aparece o quinto e último poliedro regular: o dodecaedro. Platão explicita suas idéias sobre o quinto elemento: o cosmos, que segundo ele seria a "alma do mundo".



Cubo (Terra); Tetraedro (Fogo); Dodecaedro (Cosmos); Icosaedro (Água); Octaedro (Ar)

Figura 4: Poliedros regulares e as associações de Platão

Se admitirmos que as faces de um poliedro regular podem ser polígonos regulares generalizados e que se podem intersectar, os quatro poliedros conhecidos como poliedros de Kepler-Poinsot (Figura 5) são regulares, porém não convexos.

O Poly só trabalha com poliedros convexos e, portanto, não é possível a visualização destes quatro poliedros por meio deste *software*. Para o aprofundamento do estudo dos poliedros de Kepler-Poinsot, sugerimos os endereços eletrônicos www.es.cefetcampos.br/poliedros e <http://www.atractor.pt/mat/fr-in.htm>.



Pequeno dodecaedro estrelado Grande dodecaedro estrelado Grande dodecaedro Grande Icosaedro

Figura 5: Poliedros de Kepler-Poinsot

Chama-se dual de um poliedro platônico o poliedro que se obtém unindo, por segmentos de reta, os centros das faces adjacentes do primeiro. Assim, o tetraedro é dual de um outro tetraedro; o cubo é dual do octaedro regular (e vice-versa); o dodecaedro regular é dual do icosaedro regular (e vice-versa). No endereço eletrônico <http://www.atractor.pt/mat/fr-in.htm> é possível visualizar os sólidos platônicos e seus duais. Dualidade não é uma característica específica dos poliedros platônicos, esta se estende a todos os poliedros. No entanto, o processo utilizado para obter os duais dos platônicos não pode ser estendido a todos os poliedros. Em www.es.cefetcampos.br/poliedros é possível obter outras informações sobre dualidade de poliedros.

2.2 Sólidos de Arquimedes

Os sólidos de Arquimedes ou poliedros semi-regulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice

pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro. Existem apenas treze poliedros arquimedianos.



Existem relações íntimas entre poliedros platônicos e os arquimedianos⁴. Por exemplo, efetuando cortes cada vez mais profundos nos vértices de um cubo, podemos obter alguns poliedros arquimedianos, como mostra a Figura 7.

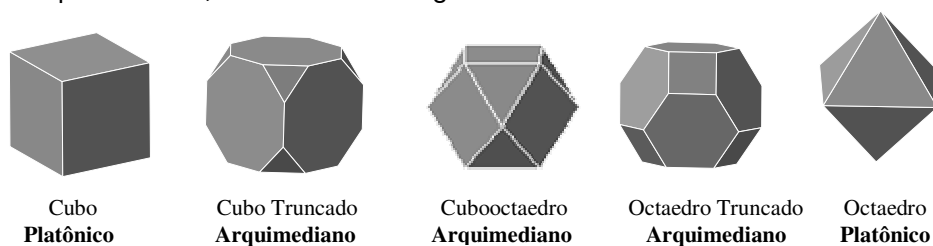


Figura 7: Exemplos de sólidos obtidos a partir do cubo, por truncamento de vértices.

Poderíamos, também, ter seguido o caminho inverso, da direita para a esquerda, começando por trincar o octaedro.

2.3 Sólidos de Catalan

Os sólidos de Catalan são poliedros duais dos sólidos arquimedianos. As faces não são polígonos regulares, mas são todas congruentes. Na figura 8 está representado um dos sólidos de Catalan, o dual do cubooctaedro. As faces são losangos e por isso se chama dodecaedro rômbo.



Figura 8: Dodecaedro Rômbo

2.4 Prismas e Antiprismas

Os prismas são poliedros com duas faces congruentes e paralelas (as bases) e cujas faces restantes (as faces laterais) são paralelogramos. São nomeados de acordo com a natureza de suas bases. Dizemos que são retos se suas faces laterais forem perpendiculares às bases, ou

⁴ Em <http://users.erols.com/quantime/Archimedean.html> é possível visualizar transformações de poliedros platônicos em arquimedianos, assim como os duais dos sólidos platônicos e dos sólidos arquimedianos.

oblíquos, se tal não acontece. Além disso, um **prisma regular** é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Uma variação da construção do prisma regular é o **antiprisma**. Um antiprisma é um poliedro que consiste de dois polígonos regulares de n lados (as bases) situados em planos paralelos, de modo que o segmento h que liga seus centros seja perpendicular aos planos das bases e, de forma que cada vértice da base superior seja equidistante de dois vértices da base inferior (ALLAN, 1997). Se as bases são polígonos regulares convexos de n lados, o antiprisma possui $2n$ triângulos isósceles como faces laterais. Se todas as faces laterais são triângulos equiláteros, o antiprisma é regular. O antiprisma regular de base triangular possui oito faces que são triângulos equiláteros e por isso ele se chama **octaedro regular**.

Existem infinitos prismas e antiprismas. Os prismas cujas faces laterais são regulares, de acordo com a definição dada anteriormente, são sólidos arquimedianos. Do mesmo modo, antiprismas de faces regulares também são arquimedianos. No entanto, não é comum incluir essas duas classes na família dos poliedros de Arquimedes.



Figura 9: Prisma hexagonal regular (à esquerda) e antiprisma hexagonal regular (à direita)

2.5 Sólidos de Johnson

Todos os poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares, e que não são poliedros platônicos, arquimedianos, prismas ou antiprismas, são chamados de sólidos de Johnson. Existem noventa e dois sólidos nesta categoria.

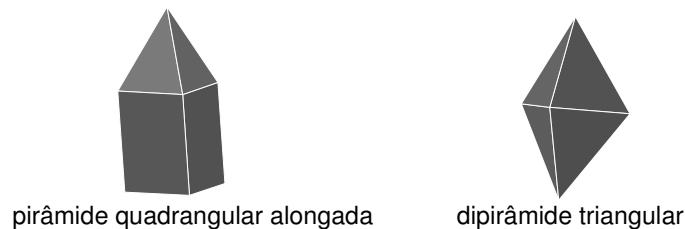


Figura 10: Exemplos de sólidos de Johnson

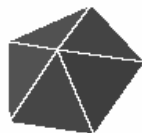
2.6 Deltaedros

Deltaedros são poliedros cujas faces são triângulos equiláteros. Existem oito deltaedros convexos, três dos quais são poliedros regulares: o tetraedro regular, com quatro faces; o octaedro regular, com oito faces; e o icosaedro regular, com vinte faces.

Se listarmos por ordem crescente o número de faces dos oito deltaedros convexos, podemos observar que cada número par de quatro a vinte está presente, com exceção do número dezoito. De fato, existem deltaedros com 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 20 faces, mas não existe nenhum com dezoito faces.



dipirâmide triangular



dipirâmide pentagonal



prisma triangular triaumentado



disfenóide achatado (snub)

Figura 11: Exemplos de Deltaedros

2.7 Dipirâmides e Deltoedros

As dipirâmides são sólidos duais dos prismas e os deltoedros são duais dos antiprismas.



Figura 12: Dipirâmide pentagonal (sólido à esquerda) e deltoedro pentagonal (sólido à direita)

2.8 Esferas e Domos Geodésicos

Uma esfera geodésica é uma estrutura composta de uma rede de triângulos que dá forma a uma superfície aproximadamente esférica. Quanto maior o número de triângulos na rede, mais próxima a esfera geodésica estará de uma esfera.

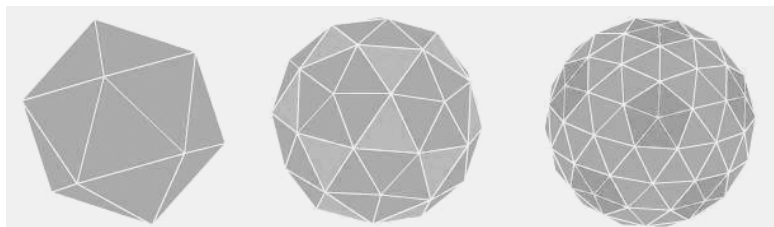


Figura 13: Esferas Geodésicas

Esses sólidos são classificados de acordo com suas freqüências. Quanto maior a freqüência mais triângulos tem o sólido e, conseqüentemente, mais curvada é sua estrutura (Figura 14). Três sólidos platônicos, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, são esferas geodésicas de freqüência 1.

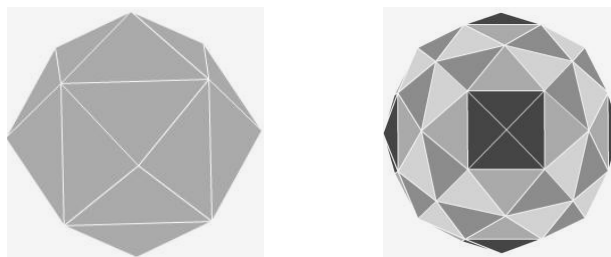


Figura 14: Esfera Geodésica Hexaédrica de Freqüência 1 (à esquerda) e Esfera Geodésica Hexaédrica de Freqüência 2

Domos geodésicos ou abóbadas geodésicas são partes fracionadas da esfera geodésica. O hemisfério geodésico é um domo em particular, obtido por um corte que divide a esfera geodésica em duas partes iguais.

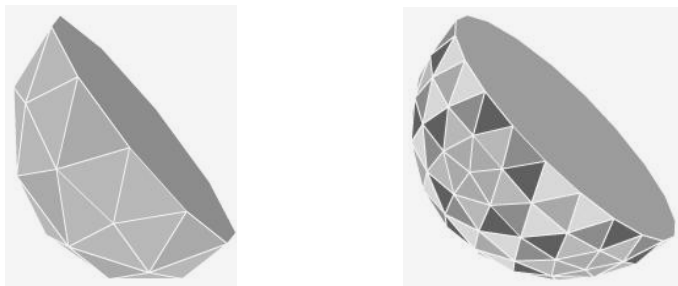


Figura 15: Hemisfério Geodésico Icosaédrico de Freqüência 2 (à esquerda) e Hemisfério Geodésico Icosaédrico de Freqüência 4 (à direita)

Bibliografia

ALLAN, N. Uma Curta História dos Poliedros. In: *Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática*, Águas de São Pedro. 1997. p. 301-311.

LIMA, E.L. Meu Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Impa e Vitae Comunicação Visual, 1991. 206p.

LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 4^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002. 299p.

HART, G. W. Duality. *Virtual Polyhedra*. 1996. Disponível em <<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/duality.html>>. Última consulta em 11/09/06.

HART, G. W. Archimedean Polyhedra. *Virtual Polyhedra*. 1996. Disponível em <<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/archimedean-info.html>>. Última consulta em 11/09/06.

HART, G. W. The Kepler-Poinsot Polyhedra. *Virtual Polyhedra*. 1996. Disponível em <<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler-poinsot-info.html>>. Última consulta em 11/09/06.

HISTÓRIAS DE GEOMETRIA – Poliedros. Disponível em <http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf>. Última consulta em 30/09/06.

SÓLIDOS DE ARQUIMEDES. Disponível em <http://www.mat.puc-rio.br/~iniciant/5_poliedros/poli_arquimedes.htm>. Última consulta em 05/10/06.

VEZZANI, C. Os Cinco Poliedros Regulares. Tradução disponível em <<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/regulares2.html>>. Última consulta em 03/10/06.

GEODESIC DOMES. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesic_dome>. Última consulta em 01/10/06.

GEODESIC DOMES: THE GEOMETRY. Disponível em <<http://www.grunch.net/synergetics/domes/domegeo.html>>. Última consulta em 01/10/06.

ATIVIDADES UTILIZANDO O SOFTWARE POLY

- 1- Explore livremente o programa
- 2- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em **Sólidos Platônicos**. Na tela já aparecerá um **tetraedro** (um tetraedro regular). Com o botão direito (ou esquerdo) do *mouse* pressionado, movimente o sólido e:
- determine:
 - o número de faces: _____
 - o número de arestas: _____
 - o número de vértices: _____
 - planeje o sólido utilizando os recursos do *software*, e confira suas respostas.
 - Verifique se a relação $V + F = A + 2$ (relação de Euler), sendo V o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas, é válida para o sólido analisado.
- 3- Repita a atividade 2 para o hexaedro e o octaedro.
- 4- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em **Sólidos Platônicos** e selecione **Dodecaedro**. Observe que este sólido é composto de 12 pentágonos regulares e:
- determine o número de arestas desse sólido, sem contar uma a uma.
 - utilize a relação de Euler e determine o número de vértices.
- 5- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em **Sólidos de Arquimedes**. Na tela já aparecerá um **tetraedro truncado**. Observe que este sólido é composto de 4 triângulos equiláteros e 4 hexágonos regulares e:
- determine o número de arestas desse sólido, sem contar uma a uma.
 - utilize a relação de Euler e determine o número de vértices.
- 6- Clique em **Sólidos de Arquimedes** e selecione **Rombicosidodecaedro**. Planifique esse sólido e identifique o tipo de face e a quantidade de cada tipo. Faça os itens a e b da atividade 5.
- 7- Clique no botão que permite visualizar o sólido montado com as arestas realçadas. Depois, clique em **Prismas e Antiprismas**. Na tela já aparecerá um **prisma triangular**. Observe o sólido e:
- determine:
 - o número de faces: _____
 - o número de arestas: _____
 - o número de vértices: _____
 - verifique se a relação de Euler é válida para o sólido analisado.
- 8 - A partir da visualização (*software Poly*), dos prismas indicados abaixo, preencha a seguinte tabela:
- | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|---|---|----|
| Número de arestas da base do prisma | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| Número de vértices do prisma | | | | | |
| Número de arestas do prisma | | | | | |
| Número de faces do prisma | | | | | |
- 9- Em todos os prismas há uma relação entre o número de arestas da base e o número de vértices, arestas e faces. Considerando um prisma cujo número de arestas da base é n , expresse, em função de n , o número de:
- faces: _____ arestas: _____ vértices: _____
- 10- A partir das relações estabelecidas na questão anterior, identifique o prisma que possui:
- 14 vértices: _____
 - 8 faces: _____
 - 12 arestas: _____