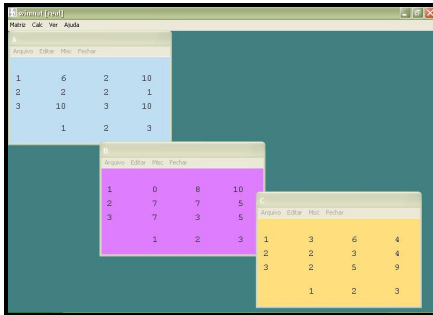
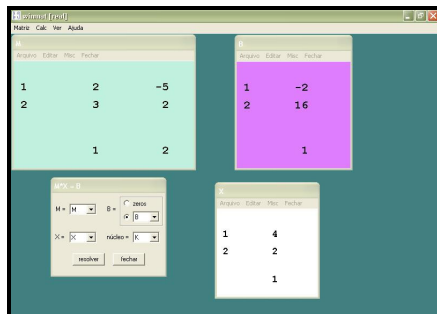
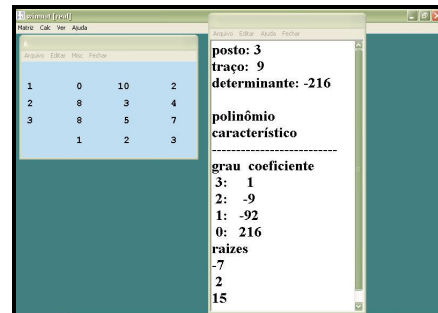


## Estudando Matrizes e Determinantes utilizando o Software Winmat



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Winmat}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Winmat}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Winmat}$$

Silvia Cristina Freitas Batista  
 Gilmara Teixeira Barcelos

Campos dos Goytacazes  
 2006

CEFET  
CAMPOS

## Estudando Matrizes e Determinantes utilizando o *Software Winmat*

### ❖ 1ª Parte - Conhecendo o *Software Winmat*

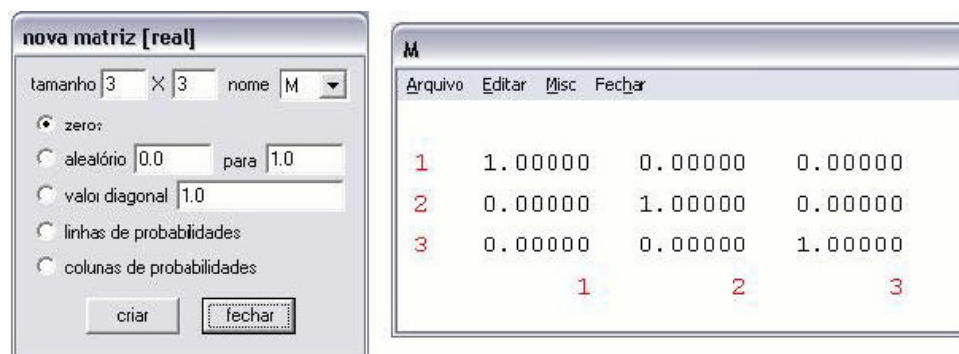
Trata-se de um programa gratuito, desenvolvido por Richards Parris, disponível, em português, no endereço eletrônico <http://www.math.exeter.edu/rparris/winmat.html>.

Nesta seção apresentamos algumas informações básicas sobre a utilização do *software* Winmat, adaptadas do material produzido por Mauri C. Nascimento, disponível em <http://www.fc.unesp.br/~mauri/Down/Winmatpr.pdf>. Outras informações poderão ser obtidas no “ajuda” do programa.

Ao abrir o *software*, visualizamos a seguinte tela:



Para entrar com uma matriz, acione “Matriz” e, em seguida “Nova”(ou Ctrl+N), na barra de menu do Winmat. Ao fazer isso, abre-se uma janela onde se escolhe a dimensão e o tipo de matriz (zeros, aleatório, valor diagonal, linhas de probabilidade ou colunas de probabilidade). Acionando o botão “criar”, a matriz aparecerá. Se você quiser uma matriz particular, escolha qualquer tipo e troque os elementos  $a_{ij}$  da matriz usando o botão da esquerda (para trocar somente um elemento) ou direito (para trocar todos os elementos) do mouse e acione a tecla “Enter” no teclado para realizar as trocas.



Na parte superior da janela “nova matriz” aparece escrito “nova matriz[real]”. Isto significa que a matriz a ser criada é uma matriz com elementos reais. É possível entrar com matrizes com elementos inteiros ou complexos. Para isso acione, na barra de menu do Winmat, “Matriz” e, em seguida “Modo”.

➤ **Comando da barra de menu do Winmat:**



**- Matriz:**

**Nova:** para entrar com uma matriz.

**Abrir:** para abrir uma matriz salva anteriormente.

**Colar:** para colar uma tabela de números reais, inserida em um texto (fora do programa). Cada campo numérico é interpretado como uma entrada da matriz. Todo o material de texto restante é ignorado quando o programa extrai a matriz.

**Modo:** para escolher o tipo de elemento da matriz (reais, inteiros, complexos).

**Rotação 2D:** matriz de rotação do plano.

**Rotação 3D:** matriz de rotação do espaço.

**Refletir/ Projetar:** matriz para projeção e reflexão.

**Fórmula:** para escolher o tipo de matriz e digitar a lei de formação da matriz.

**Copiar coluna:** para criar uma matriz formada por uma coluna de uma das matrizes já definidas.

**Fundo Branco:** para que a cor de fundo da matriz seja branca.

**Ajuda:** para tirar dúvidas sobre os itens desse menu.

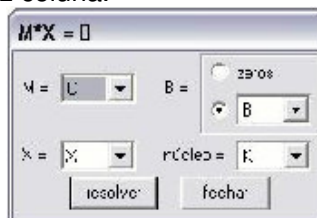
**Sair:** para sair do programa.

**- Calc** (algumas das opções descritas abaixo só aparecem no modo Real):

**Uma Matriz:** para obter informações sobre a matriz (posto, traço, determinante, polinômio característico com suas raízes).

**Calcular:** para realizar operações com matrizes, por exemplo,  $AB-2C+B^2$ ,  $1/A$  ou  $A^{-1}$  para inversa de  $A$ ,  $A'$  para a transposta de  $A$ ,  $A/B$  para justapor as matrizes  $A$  e  $B$  (veja ajuda).

**Resolver:** para resolver um sistema de equações lineares na forma matricial  $MX = B$ , onde  $B$  é uma matriz coluna.



**Prog Linear:** para maximizar ou minimizar funções lineares definidas em regiões convexas descritas por desigualdades lineares.

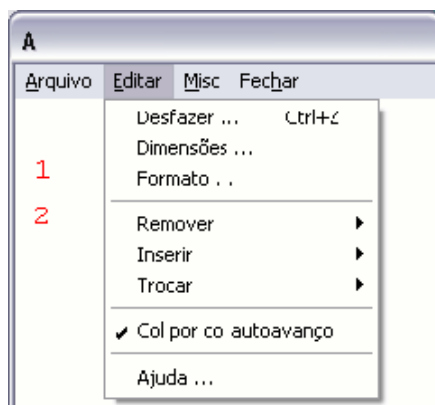
**Forma Escalonada:** abre uma caixa de diálogo que permite você levar uma matriz “passo a passo” à forma escalonada por linhas.

**Operações linhas/Colunas:** para realizar operações elementares sobre linhas e colunas.

- **Ver:** acionando “fechar” na janela de uma matriz, ela desaparece da tela. Para voltar a ver a matriz acione “Ver” e em seguida, a letra que designa a matriz.

➤ **Comando da barra de menu da Matriz:**

- **Arquivo:** para salvar a matriz como matriz (salvar ou salvar como), como texto (texto externo) ou .tex (TeXto matriz).



- **Editar:**

**Desfazer:** desfaz as últimas operações.

**Dimensões:** para mudar as dimensões da matriz.

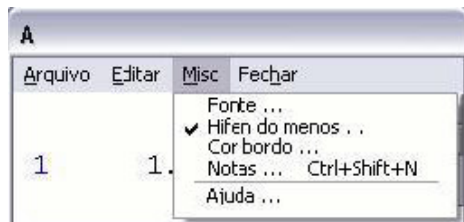
**Formato:** para definir o formato, sendo que “espessura do campo” define o espaço destinado a cada elemento ( $a_{ij}$ ) e “num decimais” define o número de casas decimais depois da vírgula.

**Resolver:** para resolver linhas ou colunas.

**Inserir:** para inserir linhas ou colunas.

**Trocar:** para trocar linha ou colunas.

**Col por col autoavanço:** para entrar com os elementos por colunas (clitando com o botão direito do mouse). Caso contrário, a entrada dos elementos será realizada por linhas.



- **Misc:**

**Fonte:** para escolher o tipo de fonte

**Hífen do menos:** para aumentar o “sinal de menos”

**Cor do bordo:** para alterar a “cor dos índices do bordo”

**Notas:** para digitar notas suplementares sobre uma

dada matriz. De início é mostrada apenas a descrição de usa criação.

- **Fechar:** para fazer desaparecer da tela a janela da matriz.

## ❖ 2ª Parte – Resolvendo Sistemas Lineares

Nesta seção apresentamos algumas informações sobre a utilização do *software* Winmat na resolução de sistemas lineares. Estas informações foram retiradas da apostila “Cenários sobre Sistemas Lineares”, disponível em <http://www.mtm.ufsc.br/geiaam/CenarioSistemaLinear.pdf>.

Os sistemas lineares no Winmat são resolvidos através da expressão  $MX = B$ , onde B representa a matriz dos coeficientes, a matriz X representa a matriz das incógnitas e B a matriz dos resultados, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases} \text{ Logo: } M = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema acima, utilizando o Winmat, criamos a matriz M e B conforme o exemplo acima, depois basta clicar no menu **Resolver** que está em **Calc**. A solução do sistema aparecerá em forma de uma matriz X, conforme a tela abaixo:



Caso tivéssemos montado a matriz M ou a B com outro nome não precisaríamos criá-las novamente com esses nomes, porque, como podemos observar, o *software* permite que informemos qual será a matriz M e B.

O *software* apresenta como solução de um sistema que seja possível e indeterminado, duas matrizes colunas, ou seja, no caso do sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 2 \\ 4x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

A resposta que estamos acostumados a obter é  $(-k, 1-k, k) \forall k \in \mathbb{R}$ . No *software* o que ele apresenta como respostas são duas matrizes colunas, sendo a primeira representando que o *software* chama de Kernel basis (núcleo base) para  $MX = B$ , ou seja, o

núcleo do sistema, no caso:  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  e a segunda  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , que é uma solução particular para o

sistema. O que nada mais é do que  $(0, 1, 0) + (-k, -k, k)$  que ainda pode ser melhorado para  $(0, 1, 0) + k(-1, -1, 1)$  - dois vetores iguais às nossas duas matrizes.

Quando calculamos este sistema, o programa apresenta as duas soluções ao mesmo tempo, em janelas separadas, mas com a tela da matriz Kernel exatamente por cima da outra tela, dando-nos a impressão de haver apenas uma única solução. Mas se arrastarmos a janela da matriz Kernel para o lado, veremos a outra janela.

Se o sistema for impossível, o programa apenas apresenta uma mensagem de erro, como mostra a figura abaixo:



### ❖ 3ª Parte – Atividades

Esta seção contém atividades, elaboradas por Gilmar Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista, com a finalidade de mostrar algumas das inúmeras formas de aplicação do *software* Winmat como recurso didático.

#### ➤ Explorando Algumas Propriedades da Adição e Multiplicação de Matrizes

##### Atividade 1

- Clique em **Matriz** e selecione **Nova**. Na janela que abrirá, solicite uma matriz  $A_{3 \times 4}$ . Em seguida, clique em **aleatório** e escolha o intervalo de 0 para 10. Clique em **criar**.
- Solicite duas outras matrizes: uma  $B_{3 \times 4}$  e outra  $C_{4 \times 2}$ .
- Clique em **Calc** na barra de menu principal e, em seguida, em **Calcular**. Na janela que abrirá solicite uma matriz  $A + C$ , nomeando-a D. Clique em **criar** e observe a mensagem exibida. Reflita sobre o porquê dessa mensagem.
- Na janela **calcular** solicite uma matriz  $A + B$ , nomeando-a D. Clique em **criar**.
- Na janela **calcular** solicite uma matriz  $B + A$ , nomeando-a E. Clique em **criar**.
- Compare as matrizes D e E. Descreva o que você observou.

##### Atividade 2

- Feche as janelas que contêm as matrizes D e E.
- Na janela **calcular** solicite uma matriz  $A * B$ , nomeando-a F. Clique em **criar** e observe a mensagem exibida. Reflita sobre o porquê dessa mensagem, comparando o número de colunas de A com o número de linhas de B.
- Novamente na janela **calcular**, solicite uma matriz  $B * C$ , nomeando-a F.
- Observe o número de linhas e colunas da matriz F. Compare o tipo da matriz F com o tipo das matrizes B e C. Descreva o que você observou.
- Na janela **calcular** solicite uma matriz  $C * B$ , nomeando-a G. Observe a mensagem exibida. Reflita sobre o porquê dessa mensagem e descreva o que você observou.
- Na janela da matriz A, clique em **Editar**, selecione **Remover** e, em seguida clique em **Colunas**. Na janela que abrirá remova a primeira coluna da matriz A, tornando-a uma matriz quadrada de ordem 3.
- Repita o que foi feito no item f, tornando também a matriz B uma matriz quadrada de ordem 3.
- Na janela **calcular** solicite uma matriz  $A * B$ , nomeando-a G.

- i) Na janela **calcular** solicite uma matriz  $B * A$ , nomeando-a H.
- j) Compare as matrizes G e H. Descreva o que você observou.
- k) Feche todas as janelas.
- l) Crie a matriz  $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .
- m) Crie a matriz  $K = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .
- n) Clique em **Calc** e, em seguida, em **calcular**. Solicite uma matriz  $J * K$ , nomeando-a L.
- o) Na janela **calcular**, solicite uma matriz  $K * J$ , nomeando-a M.
- p) Compare as matrizes L e M. Descreva o que você observou.
- q) As matrizes L e M comutam. Para que uma matriz comute com outra é necessário que ambas sejam quadradas de mesma ordem. O fato de duas matrizes atenderem a esta condição é suficiente para afirmar que elas comutam?
- r) Feche todas as janelas.

### ➤ Explorando Algumas Propriedades dos Determinantes

Antes de iniciar as atividades a seguir, certifique-se de que o *software* está no **modo real**

#### Atividade 1

- a) Clique em **Matriz** e selecione **Nova**. Na janela que se abrirá, solicite uma matriz  $A_{3 \times 3}$ , aleatória.
- b) Clique em **Calc** e selecione **Uma matriz**, clicando em seguida em A. Isso fará abrir uma janela com algumas informações, dentre as quais o valor do determinante dessa matriz. Deixe anotado esse número: \_\_\_\_\_.
- c) Feche a janela que contém o determinante.
- d) Na janela da matriz A, clique em **Editar**, selecione **Trocar** e, em seguida, clique em **Linhas**. Na janela que abrirá, troque a 1ª linha pela 3ª linha da matriz A.
- e) Siga os comandos do item b e registre o determinante da matriz assim obtida: \_\_\_\_\_.
- f) Feche a janela que contém o determinante.
- g) Na janela da matriz A, clique em **Editar** e em seguida em **Desfazer**. Isso desfaz a última modificação na matriz, fazendo com que a matriz A original volte a ser apresentada na tela.
- h) Na janela da matriz A, clique em **Editar**, selecione **Trocar** e, em seguida, clique em **Colunas**. Na janela que abrirá, troque a 1ª coluna pela 2ª coluna da matriz A.

- i) Siga os comandos do item b e registre o determinante da matriz assim obtida: \_\_\_\_\_
- j) Feche a janela que contém o determinante.
- k) Descreva o que você observou.
- l) Feche todas as janelas.

### Atividade 2

- a) Clique em **Matriz** e selecione **Nova**. Na janela que se abrirá, solicite uma matriz  $A_{3 \times 3}$ , aleatória.
- b) Substitua os elementos da matriz A por números inteiros.
- c) Clique em **Calc** e, em seguida, em **Calcular**. Na janela que abrirá solicite uma matriz  $2A$ , nomeando-a B.
- d) Novamente na janela **Calcular**, solicite uma matriz  $3A$ , nomeando-a C.
- e) Registre os determinantes com o auxílio do *software*:

$$\text{Det A} = \text{_____} \quad \text{Det B} = \text{_____} \quad \text{Det C} = \text{_____}$$

- f) Calcule (sem utilizar o *software*):

$$\frac{\text{Det B}}{\text{Det A}} = \text{_____} \quad \frac{\text{Det C}}{\text{Det A}} = \text{_____}$$

- g) Feche todas as janelas. Clique em **Matriz**, selecione **Nova** e solicite uma matriz  $D_{2 \times 2}$ .
- h) Substitua os elementos da matriz D por números inteiros.
- i) Clique em **Calc** e, em seguida, em **Calcular**. Na janela que abrirá, solicite uma matriz  $2D$ , nomeando-a E.
- j) Novamente na janela **Calcular**, solicite uma matriz  $3D$ , nomeando-a F.
- k) Registre os determinantes com o auxílio do *software*:

$$\text{Det (D)} = \text{_____} \quad \text{Det (E)} = \text{_____} \quad \text{Det (F)} = \text{_____}$$

- l) Calcule (sem utilizar o *software*):

$$\frac{\text{Det E}}{\text{Det D}} = \text{_____} \quad \frac{\text{Det F}}{\text{Det D}} = \text{_____}$$

- m) Observe os itens f e l e descreva um meio de obter determinantes de matrizes do tipo  $kM$ ,  $k \in R$ , a partir do determinante da matriz M, sendo M uma matriz quadrada de ordem n.

**Atividade 3**

- a) Mantenha na tela somente a matriz A da atividade 2 .
- b) Clique em **Calc** e, em seguida, selecione **Calcular**. Na janela que abrirá, solicite uma matriz A', nomeando-a B. Isso abrirá uma janela com a matriz B, transposta de A.
- c) Registre os determinantes:  
 Det (A) = \_\_\_\_\_ Det (B) = \_\_\_\_\_
- d) Feche as janelas. Clique em **Matriz**, selecione **Nova** e solicite uma matriz  $C_{4 \times 4}$ , aleatória.
- e) Repita os comandos do item **b** para determinar a matriz D, transposta de C.
- f) Registre os determinantes:
- g) Det (C) = \_\_\_\_\_ Det (D) = \_\_\_\_\_
- h) Descreva o que você observou.

➤ **Resolvendo Sistemas Lineares****Atividade 1**

Com auxílio do programa Winmat, resolva os sistemas abaixo:

$$a) \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 5x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 10x - 15y = 4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - 2z = 13 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 4x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$